# OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
## Etapa locală, Braşov, februarie 2010
## Clasa a XII-a

**SUBIECTUL I**
Fie $G_1 = (-a+b, a+b)$, $G_2 = (-1,1)$, unde $a, b \in \mathbf{R}$, $(a \neq 0)$ şi operaţiile $\perp$, $\top$ definite astfel:

$$x \perp y = \frac{bxy + (a^2-b^2)(x+y-b)}{xy - b(x+y) + a^2 - b^2}, \qquad (\forall) x, y \in G_1$$

şi

$$x \top y = \left(\frac{\sqrt[2n+1]{x} + \sqrt[2n+1]{y}}{1 + \sqrt[2n+1]{xy}}\right)^{2n+1}, \qquad (\forall) x, y \in G_2, n \in \mathbf{N}^*.$$

Arătaţi că $(G_1, \perp)$ şi $(G_2, \top)$ sunt grupuri abeliene şi stabiliţi un izomorfism între ele.

prof. Mihaly Bencze

**SUBIECTUL II**
Fie $(G, \cdot)$ un grup şi $H$ o submulţime a lui $G$. Spunem că $H$ este *generator de ordinul 2 pentru* $G$, dacă pentru orice element $x \in G$ există două elemente $a, b \in H$, astfel încât $x = a \cdot b$.
a) Să se arate că orice submulţime $H$ a lui $G$ cu cel puţin $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ elemente este generator de ordinul 2 pentru $G$.
b) Să se dea exemplu de grup finit cu cel puţin 4 elemente care nu are generator de ordinul 2 o mulţime finită cu $\left[\frac{n}{2}\right]$ elemente.

prof.dr. Cătălin Ciupală

**SUBIECTUL III**
Arătaţi că

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{1+3x^2} dx \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ln \frac{3\sqrt{3}}{e}.$$

prof.dr. Ioana Maşca

**SUBIECTUL IV**
Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left( \int_0^n \frac{[x]}{[x]^2+3[x]+2} dx - \ln(n+1) \right)$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real $x$.

GM 12/2009

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.